Un esperimento didattico: l’insegnamento della matematica nei centri ANCIFAP

di **CARLO FELICE MANARA**

1. Il problema dell’insegnamento della matematica ha appassionato da tempo gli esperti del ramo, e per varie ragioni. Non possiamo pretendere di fare qui un’analisi completa della questione; ma non vogliamo tuttavia rinunciare ad esporre qualche breve considerazione in merito.

Si potrebbe dire che il problema dell’insegnamento della matematica è reso difficile e spesso complicato da due circostanze di fatto che sono abbastanza facili da constatare: da una parte il fatto che la matematica è una componente ineliminabile, ovunque presente, della cultura e della scienza di tutti i popoli civilizzati; dall’altra parte, il fatto che esistono delle persone (d’altronde anche colte ed intelligenti) che dimostrano una particolare allergia per la matematica, almeno come è stata tradizionalmente insegnata.

Per quanto riguarda la prima osservazione, si potrebbe dire in altro modo che è necessario insegnare la matematica, la quale sta diventando in certo modo il linguaggio della scienza in generale; e ciò se non sempre esplicitamente con i propri simboli ed i propri formalismi, certo almeno implicitamente con i propri metodi e con la propria mentalità.

Quindi la soluzione del problema didattico dell’insegnamento della matematica risulta particolarmente importante, perché gli elementi di questa scienza sono oggi indispensabili per l’inserimento nella vita civile a qualunque livello. Per esempio, è lecito pensare che nessun cittadino possa inserirsi attivamente nella vita civile e produttiva del Paese senza conoscere quegli elementi di aritmetica che sono insegnati tradizionalmente nelle scuole dell'ordine primario.

Si potrebbe tuttavia osservare che questa necessità inderogabile di trasmettere certi contenuti, necessari — come si è detto — nella vita civile di oggi, sembra urtare contro certe tendenze attuali della matematica e della sua didattica; il conflitto rischia di essere notevolmente difficile da risolvere e pone dei problemi che meritano di essere studiati con una certa cura.

Volendo presentare la cosa in altro modo, si potrebbe dire che da una parte vi sono le esigenze della matematica e del suo rigore formale, che l’ha condotta ad impostazioni sempre più astratte e generali; dall’altra parte vi sono delle esigenze didattiche le quali si presentano pure come inderogabili.

Questo conflitto tra le varie esigenze si è presentato in modo particolarmente acuto nella occasione che stiamo per esporre ed ha dato luogo ad un tentativo di soluzione mediante l’esperimento di cui diamo relazione. La situazione che ci si è presentata può essere forse considerata come abbastanza particolare; ma si può pensare che alcune delle soluzioni escogitate e sperimentate possono trovare applicazione anche in altre situazioni analoghe e di conseguenza si può credere che il lavoro compiuto durante un arco di tempo abbastanza notevole meriti di essere conosciuto.

Se non altro vale la pena di esporlo per provocare dei giudizi e delle valutazioni e per suscitare quindi una spinta dialettica, che porti ad un progresso della tecnica didattica e quindi in definitiva ad una situazione che è di vantaggio per i discenti.

2. Prima di passare alla descrizione dell’esperimento di cui vogliamo occuparci, vale la pena di ricordare che la matematica recentemente ha visto svilupparsi dei suoi rami importantissimi, i quali danno oggi alla nostra scienza un aspetto che la rende quasi irriconoscibile, se la si confronta con l’aspetto che aveva qualche decennio fa.

Ci limitiamo a ricordare lo sviluppo dell’algebra (che ancora qualche tempo fa veniva chiamata «algebra moderna» oppure anche «algebra astratta») ed i rapporti molto intimi tra questa scienza e la logica formale; e parlando di logica non si può dimenticare tutto il capitolo della teoria degli automi, ed i suoi rapporti con la teoria della informazione. Un altro capitolo relativamente nuovo e molto importante è quello costituito dalla topologia, la quale si rivela, ogni giorno di più, come una delle colonne portanti della matematica. Da parte sua la geometria, che una volta era considerata come una parte importantissima della matematica, è quasi sparita, e comunque ha visto cambiare radicalmente il proprio compito; da quello di un importante capitolo a sé stante della matematica classica, a quello di un insieme di immagini e di suggestioni, destinate a fornire un linguaggio comodo e delle utili illustrazioni agli altri capitoli della scienza.

Volendo cercare di riassumere, e rinunciando alla precisione ed alla completezza, si potrebbe dire che la tendenza moderna della matematica la conduce nella direzione di una astrazione e di una formalizzazione sempre maggiori; cosi per esempio si potrebbe dire che una volta si studiavano separatamente determinati campi numerici i quali — si riteneva — avevano particolare importanza per la teoria e per la pratica, come il campo dei numeri razionali e quello dei numeri reali; oggi invece si preferisce introdurre, anche a livello didattico, il concetto di «campo» attraverso la presentazione e lo studio delle proprietà formali di certe strutture algebriche, e si arriva poi al campo dei numeri razionali oppure a quello dei numeri reali come a certi modelli (forse particolarmente utili) della struttura algebrica astratta.

È facile prevedere che, proseguendo per questa strada, si cede facilmente alla tentazione di presentare ai discenti prima di tutto la struttura astratta e generale, e di presentare poi i vari contenuti classici come dei modelli particolari della struttura astratta. Si giunge cosi ad un certo tipo di didattica che è sostanzialmente ispirata dall’attuale assetto logico della matematica e dalle attuali tendenze di sviluppo di questa scienza.

È facile accorgersi che stiamo parlando, sia pure in modo molto approssimato, della evoluzione di idee che ha portato alla introduzione nella scuola dell'ordine medio, ed anche in quella dell'ordine primario, della cosiddetta «matematica moderna».

La ventata di entusiasmo (spesso anche spontaneo) che ha accompagnato nella scuola la introduzione di questa novità non è ancora spenta; per qualche persona che non ha una cultura scientifica la espressione «matematica moderna» acquista un significato analogo a quello che avrebbe se indicasse una nuova dottrina, con nuovi contenuti e non invece un nuovo modo di concepire e di presentare una scienza che è vecchia come il mondo.

Viene addirittura il sospetto che questo punto di vista sia stato adottato anche da qualcuno che ha la responsabilità della stesura dei programmi ministeriali; d'altra parte va osservato che questo punto di vista è abbastanza legittimo e comprensibile.

Senza pretendere di fare un'analisi psicologica completa del fenomeno (analisi che ci è preclusa dalla nostra incompetenza nel campo della psicologia) viene fatto di pensare che la matematica ha rappresentato la «bestia nera» (come si è detto) per molti scolari e che questa circostanza è stata sbrigativamente attribuita ad una pretesa «complicazione» della matematica stessa. È quindi abbastanza comprensibile che si sia pensato di incominciare l'insegnamento della matematica da quelle che sono le idee veramente più semplici e generali di tutta questa scienza, e quindi le più «elementari **»,** secondo un certo modo di vedere.

Pertanto una conseguenza logica porterebbe a concludere che si debba insegnare prima di tutto la storia degli insiemi, con la relativa algebra di Boole (il tutto a livello intuitivo, o *naif*), e salire via via presentando delle strutture di volta in volta più complicate, sempre tuttavia secondo una linea logica che va dalla idea concettualmente più «semplice» a quella più complicata.

In modo del tutto analogo quando si passa alla analisi delle percezioni spaziali, è del tutto naturale che si pensi che i fatti studiati dalla topologia siano più «semplici » di tutti gli altri e che quindi si debba partire nell'insegnamento da questi per risalire verso la geometria affine, quella proiettiva e per presentare infine la geometria euclidea classica nella sua veste tradizionale.

Tutto ciò sembra corrispondere alla analisi degli atti elementari della mente infantile, analisi che è stata svolta da certe scuole di psicologia, le quali hanno individuato in certe strutture matematiche formali i procedimenti elementari della mente umana, ed in particolare della mente infantile, la quale costituirebbe le proprie idee secondo questi schemi.

Questo atteggiamento — ripetiamo — appare del tutto naturale e spontaneo, e non ci sentiamo quindi di criticare chi o coloro i quali hanno adottato questa linea per risolvere i problemi didattici (sempre gravi e difficili) che riguardano l'insegnamento della matematica. È infatti abbastanza naturale credere che ciò che è concettualmente più semplice ed elementare sia anche più semplice e facile da capire e da apprendere e quindi costituisca il fondamento logico e psicologico per la costruzione 'interiore' della matematica. Tuttavia si può legittimamente pensare che ciò che appare (ed è effettivamente) come l'idea più semplice e generale può non essere la più facile ed immediata da recepirsi, e soprattutto da utilizzarsi.

Non vogliamo qui instaurare una analisi strettamente tecnica; ci limitiamo a qualche osservazione che riguarda la geometria. Come abbiamo detto, questa scienza è stata considerata durante più di 20 secoli, come una parte sostanziale e addirittura fondamentale della matematica, specificata dal fatto che studiava certi contenuti, considerati come tradizionalmente noti. La nascita delle varie «geometrie - non» (geometria non euclidea, geometria non archimedea, geometria non desarguesiana ecc.), iniziata nel secolo scorso, ha scompaginato l'idea che ci si faceva della geometria, ed ha conferito a questa scienza il carattere di un «sistema ipotetico-deduttivo». Una evoluzione successiva ha portato ad una analisi approfondita dei sistemi di assiomi (o postulati) sui quali si possono fondare le geometrie dei vari tipi; il passo seguente è stato quello che ha portato alla analisi ed alla classificazione dei vari sistemi secondo la loro pretesa «complicazione»; è stato quindi facile arrivare alla conclusione che la geometria euclidea tradizionale è molto «complicata», tanto dal punto di vista della logica che dal punto di vista della psicologia. Dal punto di vista della logica, perché per costruire la geometria euclidea è necessario enunciare un insieme di assiomi molto più numeroso di quelli che sono sufficienti per costruire le altre geometrie; dal punto di .vista psicologico, perché una analisi (del tutto semplice) mostra che i postulati sui quali si fonda la geometria classica euclidea traggono la loro origine da un insieme di sensazioni (elaborate e idealizzate dalla fantasia) che appartengono alle zone percettive più svariate: sensazioni di tipo puramente visivo e sensazioni composite, che fanno intervenire tanto il senso del tatto che quello della vista che quella che si chiama la «propriocezione», cioè quell'insieme di sensazioni che ci informano sulla posizione del nostro corpo nello spazio e sulla posizione relativa delle varie parti del nostro corpo.

Questa analisi psicologica si trova tuttavia confrontata con il paradosso storico costituito dal fatto che la geometria euclidea è stata storicamente la prima che la umanità ha elaborato, e che soltanto dopo più di 20 secoli di storia della scienza e della matematica e dopo un lunghissimo travaglio critico, sono state elaborate le cosiddette «geometrie-non».

Questo fatto storico non può essere attribuito soltanto ad uno stato di infantilismo mentale o — peggio — di «oscurantismo teologico».

Appare ragionevole invece pensare che esso dimostra il sussistere di un divario tra la valutazione di semplicità che viene fatta dal punto di vista della analisi logica, e la facilità di apprendimento.

In altre parole, è forse legittimo pensare che non sia del tutto certo che la strada che parte dai concetti che sono elementari dal punto di vista della analisi logica sia quella che rende più facile e semplice l'apprendimento della matematica.

Si potrebbe obbiettare che questa risulta essere la opinione dei sostenitori della cosiddetta «matematica moderna» (indirizzo che è ormai diventato una moda e che è adottato da molti insegnanti e dai compilatori dei programmi ministeriali); questi affermano che la strada da loro seguita porta ad una maggiore facilità di apprendimento dei concetti matematici ed in definitiva a dei veri e propri successi didattici.

Da parte di alcuni psicologi della educazione abbiamo anche sentito affermare che l'insegnamento di quella che viene abitualmente chiamata la «matematica moderna» nella scuola elementare ha provocato anche un maggior profitto dei discenti nell'apprendimento delle altre materie.

La cosa appare del tutto naturale ed anche spiegabile, se si pensa che, a livello della scuola elementare, l'insegnamento della «matematica moderna» si riduce sostanzialmente all'insegnamento delle nozioni elementari della teoria degli insiemi allo stato intuitivo, ed a quello dell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme dato.

Ora è del tutto naturale che l'apprendimento di questi formalismi aiuti i ragazzi anche nella formazione e nell'apprendimento dei concetti che si riferiscono alle altre materie, all'espressione verbale dei concetti stessi ed alla deduzione.

Forse sarebbe utile controllare sperimentalmente le affermazioni dei successi di cui abbiamo parlato, perché le affermazioni possono anche essere giudicate come dettate da un ingenuo entusiasmo da neofiti; ma non vogliamo addentrarci qui in questa discussione, anche perché essa ci porterebbe in modo naturale a cercare di chiarire che cosa si intenda per apprendimento di certi concetti; a cercare di analizzare in quale misura la ripetizione di certe formule e la utilizzazione meccanica di certe procedure possa essere considerata come un segno di vero apprendimento.

Pertanto vorremmo avviare a conclusione la discussione preliminare e passare direttamente alla esposizione dell'esperimento didattico e delle sue modalità; crediamo che la esposizione dei fatti concreti possa precisare meglio quale sia il significato delle parole e chiarire ulteriormente le nostre intenzioni, che sono lontane da quella che ci porterebbe ad una sterile polemica. Infatti ci siamo trovati nella necessità concreta di non potere, per ragioni contingenti ma ineliminabili, sviluppare l'insegnamento nella sequenza che è richiesta dalle esigenze della logica astratta, e secondo le idee che ispirano una certa pedagogia della matematica.

Questa necessità ci ha portati a porci necessariamente la domanda se la linea di insegnamento che parte dalle idee fondamentali per dirigersi verso quelle che appaiono più complicate sia veramente quella che presenta le minori difficoltà per colui che deve apprendere; ed a domandarci se non si rischi di cadere vittime di un equivoco accettando che la cadenza più efficace della didattica, secondo la quale vanno presentati gli argomenti, sia quella che è ricalcata sulla rigida gerarchia logica di questi.

In altre parole, ricordando anche l'esempio storico di cui abbiamo già parlato, pensiamo che si possa anche difendere la seguente opinione: è vero che l'idea generalissima, la legge fondamentale, si presentano a noi come semplici ed unificanti, di fronte ad una congerie di conoscenze frammentarie. Ma è anche lecito pensare che proprio la presenza di molte idee e conoscenze frammentarie ed elementari abbia condotto alla esigenza storica della formulazione di leggi generali, di principi che sono logicamente prioritari.

Di conseguenza presso i soggetti che non debbano dominare delle grandi masse di conoscenze si può legittimamente dubitare che l'apprendimento dei concetti al livello astratto e generale possibile dia all'insegnamento un carattere troppo distaccato dalla realtà che invece il discente è chiamato a conoscere ed a dominare. Ne risulterebbe quindi il pericolo che l'insegnamento assuma il carattere di un formalismo vacuo, che distacca il discente da quei mezzi concettuali e formali che invece si vogliono fargli conquistare.

Per fare un esempio, pensiamo che il concetto di « legge di composizione interna» (che viene spesso presentata nei corsi universitari di algebra} sia abbastanza generale e si presti ad essere applicato a numerosissimi modelli concreti, tratti dai campi più svariati della matematica pura ed applicata; esso apre la strada allo studio delle strutture algebriche e quindi, a questo livello, appare come molto fecondo. Ma se ci si pone al livello della scuola elementare o della scuola media dell'obbligo, o in generale al livello del discente che manovra per il momento soltanto l'insieme dei numeri naturali e dei numeri razionali, questo concetto (che egli facilmente apprenderà) risulta forse di efficacia molto minore, perché la quantità di leggi particolari che egli potrebbe unificare con l'impiego di questo concetto è molto piccola.

Si potrebbe forse rispondere che l'insegnamento della matematica dovrebbe assumere i propri contenuti e i materiali per i propri esempi anche da campi più vasti di quello che riguarda la quantità pura; tuttavia ciò non impedisce di pensare che l'apprendimento di un vocabolario tecnico, anche se estremamente generale e rigoroso, che non si riferisca a determinati contenuti, non dà l'impressione al discente di aver conquistato un accrescimento delle conoscenze e delle possibilità di azione sul mondo.

A questo proposito è interessante ricordare le reazioni che le famiglie degli allievi avevano qualche tempo fa (e forse in parte hanno anche oggi) davanti ai contenuti dell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme. Molto frequentemente la reazione attraversava varie fasi: in un primo tempo la persona di famiglia che « ... si intende di matematica» (magari il padre ingegnere) reagiva dicendo: «questa non è matematica!». In un secondo tempo, se e quando il genitore si era sforzato di capire quanto sta sotto il formalismo dell'algebra di Boole e aveva esaminato gli esempi elementari che vengono presentati nei libri, la reazione diventava: «Queste sono banalità». Tali reazioni, per quanto dettate da spirito acritico e forse poco informato, hanno tuttavia un fondo di verità; la seconda soprattutto mette forse in luce il fatto che presso la maggioranza l'adozione di un linguaggio astratto e di un simbolismo viene accettata, recepita e giustificata quando esiste una motivazione abbastanza concreta. Altrimenti viene rifiutata, più o meno decisamente, come inutile e vuota.

Pensiamo pertanto che uno dei problemi didattici fondamentali sia quello di raggiungere con i propri allievi quel livello di astrazione e di formalizzazione al quale si concilia il costante interesse del discente (che, come suoi dirsi, viene costantemente «motivato») con la generalità ed il rigore della trattazione teorica.

Le constatazioni che abbiamo fatto fin qui si riallacciano abbastanza bene a tutto quanto si potrebbe dire a proposito di un aspetto della matematica; precisamente quello secondo cui la matematica ci si presenta come un linguaggio. Addirittura il linguaggio della scienza (almeno nelle sue tendenze fondamentali, se non in modo esplicito, come abbiamo già avuto occasione di osservare) cosi come Galileo ha esposto in una celebre pagina del «Saggiatore» '.

Questa considerazione ci porta a qualche conclusione per quanto riguarda i processi di apprendimento ed anche per quanto riguarda le tecniche di insegnamento della matematica.

Invero si potrebbero fare dei paragoni che non hanno valore assoluto, ma che danno qualche idea sulla direzione verso la quale vorremmo avviare il nostro discorso. È infatti chiaro che l'apprendimento completo di un linguaggio richiede da parte del discente un'analisi completa di tutti gli elementi che **si** riferiscono al linguaggio stesso; tale analisi va dalla esplorazione del processo grafico e verbale dell'espressione (lettere, sillabe, fonetica ecc.) alla grammatica ed alla sintassi. Tuttavia è pure altrettanto chiaro che questi passi sulla via dell'apprendimento non vengono fatti secondo una successione cronologica che ricalca la successione della «complicazione» logica; pare che la pedagogia moderna abbia ripudiato il metodo di insegnamento della scrittura che partiva dalle famigerate «aste», cosi come ha ripudiato il metodo che partiva dalla lettura delle vocali isolate. Si è finalmente accettato il fatto naturale che l'apprendimento di un linguaggio avviene con un processo che potrebbe essere detto «globale»; il discente impara praticamente, utilizzando la lingua per imitazione ed accettando di volta in volta le correzioni pratiche che gli vengono da chi lo ascolta. Nel caso dell'apprendimento della lingua è chiaro che il momento dell'analisi deve venire, ed in particolare il momento dell'analisi morfologica, grammaticale, sintattica; ma questa analisi viene soltanto in un secondo tempo, quando il discente ha già appreso praticamente ad esprimere le proprie idee, e soprattutto quando l'analisi può avere come contenuto dei fattori noti, come le espressioni che il discente utilizza già da qualche tempo con relativa speditezza e sicurezza.

Non si capisce perché anche nel caso della matematica non si debba adottare un metodo analogo, almeno nella misura nella quale la matematica stessa assume l'aspetto di un linguaggio. È chiaro che il paragone tra i problemi dell'insegnamento della matematica e quelli dell'insegnamento della lingua materna può essere considerato manchevole sotto molti aspetti; ma va ricordato che le analogie rilevate nel comportamento di molti discenti nei riguardi dell'apprendimento della matematica e di una lingua sono molto interessanti. Nel caso in esame per esempio si potrebbe dire che è desiderabile raggiungere un livello di astrazione che sia il minimo sufficiente per svegliare l'interesse del discente, tenuto conto delle sue esperienze vitali, anche di quelle tratte dal mondo esterno, e del suo sviluppo intellettuale. Per esempio possiamo pensare che sia discutibile seguire la strada che porterebbe ad insegnare con priorità cronologica certe strutture dell'algebra quando il discente difficilmente può constatare la profondità e la potenza di questi concetti, avendo un patrimonio ancora abbastanza scarso di nozioni particolari da organizzare.

Questo nostro atteggiamento è coerente con quanto abbiamo detto poco fa a proposito di quello che ci sembra essere il problema didattico fondamentale: quello della ricerca del livello di astrazione a cui il discente sia motivato, ed esperimenti l'efficacia dello strumento concettuale che gli si vuole consegnare.

Pensiamo che le esemplificazioni concrete che verranno date nel seguito aiuteranno a comprendere quale sia la portata del nostro discorso.

4. Riteniamo che sia giunto il momento di uscire dal vago e di descrivere, nei limiti del possibile, le circostanze dell'esperimento concreto che ha assorbito il nostro tempo in un periodo relativamente recente. I soggetti ai quali era destinato il nostro lavoro sono i giovani dei centri dell'ANCIFAP (Associazione Nazionale Centri IRI Formazione Addestramento Professionale). In linea di massima la fascia di età è quella dai 13 ai 16 anni, cioè dall'uscita della scuola dell'obbligo all'entrata nel mondo del lavoro.

Come è noto i Centri ANCIFAP in Italia sono sette: Trieste, Genova-Sestri, Milano-Arese, Terni, Roma-Fiumicino, Taranto, Napoli.

Sostanzialmente il programma dei Centri ANCIFAP è quello di formare le maestranze del mondo del lavoro con un'istruzione professionale che tenga conto anche delle richieste dell'ambiente nel quale i discenti dovranno inserirsi nel futuro. Questa circostanza spiega la parziale diversità dei programmi di insegnamento tra i vari centri e quindi motiva anche in parte le soluzioni che abbiamo dovuto dare a certi problemi. Tali soluzioni sono condizionate alla qualità dei discenti, alla esistenza di corsi paralleli che questi debbono seguire, ed infine allo scopo che i corsi si propongono.

Anzitutto per quanto riguarda la qualità dei discenti è da rilevare che in teoria questi dovrebbero avere compiuto l'obbligo scolastico, con la frequenza delle tre classi della scuola media. In pratica i vari centri si trovano spesso davanti a dei ragazzi che hanno seguito la scuola media dell'obbligo in modo spesso irregolare e saltuario, e qualche volta hanno frequentato soltanto la scuola elementare. In certo modo si potrebbe dire che nella maggioranza si tratta di soggetti che la nostra società di oggi destina al lavoro, discriminandoli rispetto ai loro coetanei che sono destinati a proseguire nella carriera degli studi.

Questa diversificazione è determinata più dal reddito della famiglia d'origine e dalla classe sociale di appartenenza che giustificata da particolari attitudini allo studio, o dal livello di intelligenza, o di impegno nel lavoro intellettuale. Non ci soffermiamo a commentare questa situazione sociale, la quale tuttavia costituisce una realtà storica nell'Italia contemporanea.

Da questa esperienza pregressa, spesso non troppo brillante anche per l'ambiente scolastico frequentato, i discenti traggono generalmente un atteggiamento nei riguardi della scuola che è difficile descrivere efficacemente fino in fondo. Volendo tentare un'analisi superficiale, si potrebbe dire che lo stato d'animo è misto di frustrazione e di rigetto nei riguardi della scuola che si potrebbe, per intenderei, qualificare di «teorica»; per converso invece vi sono in questi soggetti dei lati positivi, i quali potrebbero essere descritti dicendo che i discenti dei Centri ANCIFAP hanno una maturità maggiore di quella dei loro coetanei per una maggiore esperienza di vita, per le difficoltà che essi esperimentano in famiglia oppure che essi osservano nelle persone che sono loro vicine; inoltre per la preparazione psicologica ad affrontare il lavoro di officina, il suo ambiente, le crude realtà della vita quotidiana e delle sue battaglie. Va detto inoltre che il tempo che i discenti passano nei Centri ANCIFAP è suddiviso tra ore di lezioni teoriche ed ore di officina. Da questa situazione concreta, dalla manovra dei materiali, del legno, dei metalli, degli attrezzi, del contatto con le macchine e con i problemi tecnici nasce nei discenti un'ulteriore esigenza di concretezza e di immediatezza nei riguardi delle materie che debbono essere studiate.

Occorre infine tener presente il fatto che nei Centri ANCIFAP è stato iniziato da qualche tempo (e comunque prima dell'esperimento che riguarda la matematica) un esperimento per l'insegnamento della fisica; non possiamo qui soffermarci a descrivere nei particolari e nelle sue linee fondamentali e nei suoi criteri direttivi il programma dell'insegnamento della fisica; questo d'altronde è già stato presentato pubblicamente. Tuttavia volendo descrivere brevemente e sommariamente i criteri direttivi che hanno ispirato questo rinnovamento dell'insegnamento della fisica, si potrebbe dire che esso è ispirato sostanzialmente dall'"idea di far eseguire ai discenti un certo numero di esperienze fondamentali della fisica, dalle quali il discente stesso è guidato a formulare le leggi di questa scienza. In altre parole si potrebbe dire che la realtà è osservata direttamente dal discente opportunamente condotto, e poi rappresentata con il linguaggio della matematica; quindi l'insegnamento della fisica trova il suo fondamento nella successione delle esercitazioni programmate, che portano i discenti direttamente a contatto con i fenomeni principali della fisica e con le sue leggi fondamentali. I fenomeni presi in considerazione appartengono a tutti i capitoli della fisica; di conseguenza con questa tecnica anche l'elettrologia acquista un'evidenza sperimentale che è quasi allo stesso livello della meccanica. Infatti i discenti sono muniti degli strumenti di misura delle grandezze elettriche e sono guidati a tradurre in diagrammi, con carta millimetrata, le osservazioni che verranno in seguito sintetizzate nelle leggi elementari. Inoltre una simile tecnica per raggiungere le leggi della fisica suppone necessariamente la necessità di effettuare delle letture di strumenti e delle misure; essa conduce quindi anche necessariamente alla considerazione di numeri approssimati ed a quella delle operazioni su numeri che traducono misure approssimate.

Resta da ricordare inoltre che, insieme con le esigenze del corso di fisica rinnovato, l'insegnamento della matematica ha dovuto tener conto delle esigenze delle ore di esercitazione in officina, che i discenti compiono sotto la guida di istruttori. Queste esigenze vanno dalla necessità di « leggere» i disegni tecnici più elementari e di eseguire le corrispondenti operazioni per la traduzione delle dimensioni «in scala», alla necessità di eseguire la radice quadrata di un numero razionale; infatti nelle esercitazioni di officina sono contemplate delle operazioni che comportano la capacità di determinare gli elementi di un triangolo rettangolo, quando si abbiano informazioni sufficienti che lo individuano.

Queste esigenze, ed altre che tralasciamo, hanno posto dei particolari problemi che abbiamo dovuto risolvere in modo necessariamente diverso da quello abitualmente seguito nelle altre scuole; ripetiamo tuttavia che il corso di fisica, con le sue caratteristiche, e le ore di esercitazione di officina, di cui abbiamo parlato poco fa, conferiscono ai discenti dell'ANCIFAP una particolare qualità di ricerca di concretezza, sulla quale ci si può appoggiare per l'insegnamento della matematica. Anticipando un poco quello che stiamo per dire, si potrebbe affermare che le esperienze dirette che questi giovani hanno dei materiali, degli attrezzi e delle macchine forniscono molti appoggi concreti per poter sviluppare il discorso che porta a presentare la matematica come il linguaggio della scienza e della tecnica.

5. Le considerazioni che abbiamo svolto poco fa conducono a giustificare la impostazione che abbiamo dato al nostro corso di matematica. Il punto centrale della trattazione della materia in oggetto è dato dal concetto di «grandezza» accettato come intuito per astrazione diretta della manovra delle cose concrete e delle grandezze della fisica. In questo ordine di idee gli strumenti della matematica vengono presentati come un linguaggio per poter parlare delle grandezze (mediante opportune convenzioni) e per poter trarre delle informazioni ulteriori, rispetto a quelle che già si posseggono, mediante le leggi che reggono il simbolismo della matematica. Per fare un esempio, si potrebbe dire che mediante opportune convenzioni o mediante determinati strumenti (assunti come dati e non descritti né spiegati teoricamente, a questo stadio) ad ogni grandezza si può associare un numero, che viene detto la misura della grandezza stessa (in determinate unità); se la corrispondenza tra grandezze e numeri è stata ottenuta mediante opportune convenzioni ed operazioni, allora le operazioni che saranno eseguite sulle misure potranno dare delle ulteriori informazioni ed in particolare potranno permettere di prevedere il risultato delle operazioni eseguite sulle grandezze corrispondenti. Per esempio, in linea di principio si potrebbe fare corrispondere ad ogni segmento un numero mediante una scala logaritmica; tuttavia se il numero che viene chiamato la misura di un segmento viene ottenuto mediante le abituali operazioni che si basano sul trasporto rigido di un segmento campione e dei suoi sottomultipli, allora si verifica il fatto seguente: al segmento che viene abitualmente chiamato «somma» di due altri e che si ottiene abitualmente con manovre ben note e concrete, corrisponde il numero che si ottiene facendo la addizione (nel senso della matematica) delle due misure corrispondenti ai segmenti addendi. Pertanto non è necessario eseguire l'operazione di misura del segmento «somma», perché le informazioni che si possono trarre da questa operazione sono già state ottenute dalla operazione matematica. In generale quindi la conoscenza degli strumenti della matematica permette di prevedere il risultato di certe operazioni concrete che si eseguiscono sulla realtà; questa conoscenza è quindi uno dei mezzi che si possono utilizzare per avere informazioni sulla realtà, cioè in definitiva per conoscerla e per utilizzarla.

In coerenza con l'impostazione che abbiamo cercato di esporre, la trattazione del capitolo che riguarda le grandezze è tenuta ad un livello che non porta mai ad introdurre delle nozioni astratte, ma invece è riferita all'interpretazione concreta, tratta dalla tecnica, dalla fisica o dalle operazioni che si eseguiscono sui simboli matematici.

Va detto tuttavia che nel corso di matematica non si rinuncia definitivamente a studiare gli enti della matematica presi in sé; questo studio viene fatto, ma viene diretto ad un fine che potrebbe essere descritto dicendo che mira a «smitizzare» la matematica, nel senso che mira a toglierle quel carattere che ne fa spesso una raccolta di formule magiche, una specie di ricettario di procedimenti misteriosi; carattere che la matematica assume presso certe persone che la debbono utilizzare, ma che non ne fanno oggetto di uno studio particolare. Per combattere questa tendenza si è cercato di motivare il più possibile (sempre tuttavia con riferimento a problemi concreti) la introduzione di regole e di strutture algebriche, in modo da tener sempre in vista lo scopo che si vuole conseguire, che potrebbe essere descritto dicendo che si vuole economizzare memoria e raggiungere una visione unitaria delle cose; in linea di principio si mira ad una impostazione che conduca a ritrovare le formule quando chi deve utilizzarle le abbia dimenticate, oppure non abbia a disposizione una tabella o un formulario.

6. Le esigenze che abbiamo cercato di mettere in luce e le condizioni di partenza dei vari discenti hanno consigliato una soluzione pratica che non ha portato alla scrittura di un testo per gli allievi, testo che fosse dedicato a loro direttamente. Ciò non significa tuttavia che si sia trascurato di prendere in considerazione il problema di informare i discenti: tale problema, come si vedrà anche in seguito, è stato risolto con la stesura di opportune «schede di sintesi **»,** che non vorrebbero tuttavia essere costitutive di un libro di testo.

In vista delle esigenze dei vari Centri ANCIFAP si è scelta la strada della stesura di «schede didattiche», le quali sono dirette, in linea di principio, agli insegnanti dei vari centri. In queste schede si cerca di raggiungere lo scopo di non dilungarsi eccessivamente negli sviluppi delle dimostrazioni e dei calcoli (dimostrazioni che sono supposte note in linea di massima ai docenti, e calcoli che questi dovrebbero sapere sviluppare da soli), ma si cerca di mettere a fuoco l'aspetto didattico di ogni singolo capitolo, lasciando al docente il compito di scegliere di volta in volta il livello al quale egli ritiene opportuno svolgere la trattazione di un determinato capitolo, in vista delle esigenze del programma e delle conoscenze e delle reazioni degli allievi. Si è insistito sulla particolare caratteristica che si vuole dare al corso in esame, affinché il docente non dimenticasse mai che lo scopo dell'insegnamento della matematica è anche quello di insegnare delle strutture astratte che possono servire al discente per conoscere meglio una realtà concreta o per poter eseguire delle manovre tecniche su di essa; la matematica quindi ha un aspetto formativo allo stesso titolo a cui lo ha l'insegnamento della lingua materna perché, come quest'ultima, costituisce un mezzo fondamentale di trasmissione del pensiero, di espressione e di deduzione.

Anzi, si potrebbe dire che da un certo punto di vista la matematica risulta essere particolarmente educativa; perché costringe chi la vuole utilizzare a chiarire bene le proprie idee, ad esprimere in modo corretto le informazioni che possiede, a dedurre secondo regole formali rigorose ed ineccepibili.

Come abbiamo già accennato, e come diremo anche nel seguito, il problema di consegnare agli allievi dei libri o delle dispense che servissero alla preparazione agli esami e ad alleviare lo sforzo mnemonico, è stato risolto con la stesura di certe «schede di sintesi », stesura che è avvenuta con la collaborazione di un gruppo (abbastanza ristretto) di insegnanti. Vogliamo ricordare qui che, nello spirito del corso di matematica, è stata data particolare importanza a raccolta di esercizi, che servissero ad avanzare nella direzione verso la quale si vuole sviluppare il corso; nella direzione cioè che porta ad insegnare la matematica non come una materia astratta, un insieme di formule vuote e di enunciati astratti, ma come un linguaggio, il cui pregio principale è quello di servire per la conoscenza scientifica e per la tecnica, linguaggio che si apprende e si perfeziona soprattutto con l'esercizio.

Sarà inutile osservare che l'impostazione che abbiamo dato al corso non intende in alcun modo trattare i discenti in questione come dei «cittadini di serie B» della comunità scolastica italiana; anzi si è voluto prender partito dall'insieme di esperienze concrete e di abilità manuali che i discenti hanno acquisito o stanno acquisendo per conferire ad essi una unità nelle loro conoscenze, una contiguità tra conoscenza tecnica e scientifica ed esperienza di lavoro che probabilmente non è posseduta dal resto della popolazione scolastica italiana. Quest'ultima invece corre il pericolo di vedersi ammannire una trattazione della matematica in cui il rigore logico viene spesso commisurato con il grado di distacco dalla realtà; e di essere messa di fronte a dei problemi di critica che superano la sua maturità ed i suoi interessi. Senza escludere il pericolo che una impostazione cosiffatta possa magari ottenere come risultato quello di radicare l'idea della matematica concepita come un inutile gioco astratto.

7. La pratica dell'esperimentazione didattica, che ha guidato il nostro lavoro durante questo periodo, ha condotto a strutturare le schede didattiche per gli insegnanti in vari «blocchi didattici»; tali suddivisioni sono state fatte non nell'intento di separare vari capitoli, ma semplicemente per ribadire certe distinzioni, che sono state fatte per aiutare l'insegnante più che per imporre certe barriere e certe frontiere. Coerentemente con queste idee è stato ripetutamente ribadito che l'insegnante è relativamente libero di scegliere il ritmo di svolgimento e anche entro certi limiti la successione dello svolgimento degli argomenti, quando l'allontanamento dal programma stabilito sia motivato da certe situazioni didattiche o da certi scopi da conseguire. Del resto questa esigenza è già stata recepita nella stesura delle schede didattiche per gli insegnanti, accettando di inserire molto presto degli argomenti che erano richiesti dalle esercitazioni di officina o dal programma di fisica.

I blocchi di cui stiamo parlando sono stati presentati secondo un diagramma logico, che illustra la dipendenza logica dei vari argomenti; in questo diagramma troviamo al primo posto un blocco che è stato intitolato convenzionalmente «Insiemi e logica»; da questo dipendono due altri che abbiamo intitolato convenzionalmente «Strutture» e «Operazioni »; da questo un blocco (di cui abbiamo già parlato) che abbiamo convenzionalmente intitolato «Grandezze e misure».

Il diagramma logico che abbiamo presentato può essere ulteriormente illustrato indicando i contenuti dei vari blocchi. Per quanto riguarda il primo, cioè il blocco che viene indicato convenzionalmente con il titolo «Insiemi e logica», potremmo dire che il suo contenuto è dato dalle nozioni di teoria degli insiemi a livello intuitivo (o naif) con le corrispondenti operazioni dell'algebra di Boole, anzitutto presentate con riferimento alle operazioni di intersezione e di unione dei sottoinsiemi di un dato insieme e poi a livello più astratto. Viene poi presentata sommariamente la teoria delle proposizioni non analizzate e le varie operazioni logiche fondamentali; queste vengono interpretate in vari modi: con sistemi fisici (circuiti elettrici) oppure mediante le operazioni della aritmetica «modulo 2». Il blocco che abbiamo intitolato convenzionalmente «Strutture» è dedicato alla presentazione delle strutture algebriche più importanti e delle relazioni fondamentali della matematica. Vengono presentate in esso le strutture algebriche di gruppo e di campo; in particolare il concetto di gruppo viene collegato con i concetti della geometria, sotto il particolare aspetto di «gruppo di trasformazioni ». I gruppi di trasformazioni di un insieme in se stesso vengono anche collegati con la relazione di equivalenza, con le sue proprietà formali e con la costruzione dell'insieme quoziente di un insieme dato rispetto ad una relazione di equivalenza; come è noto questa ha un'importanza fondamentale nella matematica, proprio in relazione alla possibilità di costruzione dell'insieme quoziente. Infine le relazioni di ordinamento (parziale e totale) sono presentate in relazione alle varie nozioni sugli anelli e sui campi che sono già stati portati a conoscenza dei discenti, oppure che sono a lui noti a livello almeno intuitivo. Il blocco intitolato convenzionalmente «Operazioni » è dedicato sostanzialmente alla presentazione dei concetti di «anello» e di «campo», soprattutto mettendo in evidenza gli omomorfismi che sussistono tra varie strutture algebriche, e ciò allo scopo di unificare le varie regole e le tecniche con le quali si opera in vari capitoli della matematica. Infine il blocco intitolato convenzionalmente «Grandezze e misure» è dedicato (come abbiamo già detto) a mettere in luce il carattere della matematica, intesa come linguaggio che ci permette di parlare della realtà e — con le sue regole — ci permette anche di dedurre delle informazioni sulla realtà, informazioni che anticipano e talvolta addirittura sostituiscono le informazioni che si potrebbero avere dalla esperienza, quando il linguaggio matematico sia opportunamente utilizzato. Per esempio, quando si usa il calibro per determinare lo spessore delle lamiere, la operazione di addizione dei due numeri che rappresentano gli spessori di due lamiere permette di prevedere quale sarà lo spessore della lamiera che si ottiene sovrapponendo le due. Si mette cosi in luce il parallelismo che intercede fra certe operazioni matematiche si eseguiscono nella tecnica e nella fisica, e certe operazioni che la matematica insegna ad eseguire sui simboli delle grandezze considerate; questi simboli si ottengono con determinate tecniche, variabili di volta in volta, la più importante delle quali conduce alla operazione di misura di una grandezza. Possiamo pertanto ripetere che questo blocco costituisce in certo modo la parte centrale del corso, perché mira a presentare la matematica come un linguaggio, della scienza e della tecnica, secondo le idee che abbiamo ripetutamente espresso e che si trovano magistralmente esposte nel passo celebre di Galileo che abbiamo già citato. Tra l'altro in questo blocco viene anche analizzato il concetto di angolo, il quale viene inteso come misura collegata ad una esperienza concreta, che è quella data dal movimento di rotazione; il discente infatti ha nella sua esperienza quotidiana la pratica di ruotare dei volantini, oppure la osservazione del ruotare certi indici.

In stretto collegamento con queste esperienze, e sempre con riferimento a problemi concreti, viene anche presentato l'insieme delle relazioni della trigonometria, sfrondate da tutto l'accompagnamento di idee accessorie che da qualche decennio formano l'apparato teorico che non si distacca mai da questi concetti. I blocchi che abbiamo presentato sono accompagnati anche da un blocco che abbiamo convenzionalmente intitolato «Complementi di algebra e geometria»; in questo sono svolti alcuni argomenti che sono richiesti per la preparazione di qualche centro; per esempio in questo blocco sono presentati i numeri complessi (utili per qualche insieme di allievi che debbono occuparsi di elettrotecnica) le equazioni di secondo grado ed altri contenuti che, come abbiamo detto, pur non essendo strettamente necessari per il corso nella sua completezza, sono tuttavia utili per le necessità di qualche centro.

Tutti questi blocchi sono preceduti da un blocco che abbiamo intitolato convenzionalmente con la espressione «Azzeramento» ed indicato con la sigla A-1. La sua trattazione dovrebbe occupare praticamente il primo trimestre del corso; uno dei suoi scopi dovrebbe essere quello di stabilire un punto di partenza comune per tutti i discenti i quali — come si è detto — provengono spesso da esperienze scolastiche diverse tra loro. Il contenuto di questo blocco è dedicato a vari scopi; anzitutto il possesso sicuro di quella che si potrebbe chiamare la «grammatica» della matematica: la manovra delle operazioni aritmetiche e la sicurezza nell'impiego delle convenzioni.

Occorre osservare che questa sicurezza viene tendenzialmente cercata non attraverso l'esercizio defatigante e privo di contenuto, ma attraverso la ricerca della motivazione profonda delle regole formali della matematica.

Si dà quindi molto spazio alla rimeditazione delle convenzioni che si adottano per rappresentare un numero intero, convenzioni che sono acquisite ed adottate dalla civiltà occidentale da vari secoli.

In modo analogo vengono rimeditate le leggi fondamentali del calcolo letterale e le regole per la risoluzione delle equazioni di primo grado in due incognite.

Questa risoluzione viene richiamata facendo appello alla nozione intuitiva di «funzione» ed all'utilizzazione della carta millimetrata, che già il discente utilizza metodicamente per le esercitazioni del corso di fisica di cui si è detto.

Con idee direttive analoghe vengono anche presentati i concetti di proporzionalità diretta ed inversa tra classi di grandezze.

Infine vorremmo dire che lo svolgimento del blocco A-1 dovrebbe anche permettere al docente di « tastare il polso» (per così dire) agli allievi che gli sono stati affidati, e di fare in modo che le regole più trite e consuete della aritmetica siano motivate nella misura del possibile; tale è anche lo spirito secondo il quale viene presentata anche la regola per la estrazione della radice quadrata.

Si prende occasione da questa presentazione per introdurre l'idea (non formalizzata in modo astratto e rigoroso) della esistenza di algoritmi infiniti i quali permettono di dare delle misure di determinate grandezze che siano rappresentate da numeri razionali e siano approssimate da uno scarto minore di un limite prestabilito.

Tra l'altro, come vedremo più ampiamente in seguito, il blocco A-1 dovrebbe poter permettere al docente di introdurre di fatto il vocabolario della matematica moderna, ed in particolare della teoria intuitiva ed ingenua degli insiemi.

Questa introduzione dovrebbe avvenire di fatto — come abbiamo detto— cioè senza definizioni esplicite e senza che il docente dedichi agli argomenti delle lezioni apposite o delle particolari spiegazioni.

Tale vocabolario ed il relativo simbolismo dovrebbero così essere appresi dai discenti come si apprende la lingua materna; cioè per imitazione, cercando di esprimere le idee, accettando le correzioni, prima ancora di studiare «ex professo» le regole della grammatica e della sintassi.

8. Abbiamo esposto brevemente la struttura dei blocchi delle schede didattiche per insegnanti, secondo la successione logica che è imposta dalla dipendenza di ciascuno dei blocchi dagli altri.

Dobbiamo tuttavia osservare che questa struttura logica non traduce la successione cronologica secondo la quale gli argomenti vengono presentati ai discenti, e secondo la quale gli esercizi vengono affrontati e risolti. Infatti fin dall'inizio della sperimentazione didattica sul rinnovamento dell'insegnamento della matematica si è dovuto constatare che — come abbiamo già accennatola strada che conduce dai concetti logicamente basilari e fondamentali ai concetti più complicati non pare che sia quella didatticamente più efficace. In particolare per esempio, nel periodo iniziale della sperimentazione, si è incominciato presentando agli allievi i contenuti di quello che abbiamo chiamato il blocco «Insiemi e logica».

Tuttavia questa impostazione dell'insegnamento ha dato luogo a vari inconvenienti ed a reazioni che si potrebbero dire "di rigetto" da parte degli allievi; lunghe discussioni su questi fenomeni hanno portato a concludere che le loro cause erano principalmente dovute ad un doppio ordine di ragioni. Anzitutto al fatto che i discenti debbono seguire contemporaneamente anche il corso di fisica, che è stato ristrutturato nel modo che si è detto; in secondo luogo al fatto che le ore di esercitazione di officina richiedevano anche la conoscenza di determinati procedimenti teorici, la risoluzione di problemi elementari in modo tale che i discenti potessero dominare in modo ragionevole i vari materiali sui quali essi debbono operare e gli attrezzi dei quali debbono servirsi. È apparso chiaro che insistendo sul voler trattare in modo prioritario gli argomenti che costituiscono il blocco che abbiamo intitolato « Insiemi e logica» si sarebbero provocati numerosi inconvenienti, perché i discenti manifestavano chiaramente l'opinione che la matematica che si voleva insegnare loro risultava totalmente distaccata dagli strumenti teorici dei quali essi dovevano servirsi.

Analoghe erano le reazioni degli istruttori di officina e degli insegnanti di fisica, i quali ripetutamente facevano presenti le necessità che i giovani possedessero e manovrassero con sicurezza certi strumenti matematici. Si è quindi radicato il dubbio (di cui abbiamo già parlato) sul fatto che la presentazione di certi argomenti, che sono fondamentali dal punto di vista della logica astratta, ma che appaiono distaccati dalla realtà sulla quale il discente opera quotidianamente, si corra il pericolo di presentare la matematica come se fosse una materia totalmente astratta, e di nascondere invece quell'altro suo carattere di mi abbiamo già detto più volte, che è quello di essere il linguaggio comune della scienza e della tecnica.

Per esempio, per quanto riguarda l’algebra di Boole dei sottoinsiemi di un dato insieme, si potrebbe dire che tutti i problemi di logica che si possono presentare come esercizi, ben raramente convincono del fatto che sia necessario o anche soltanto utile imparare l’algebra di Boole; d’altra parte le esigenze di rigore che storicamente hanno portato all’analisi dei fondamenti della matematica caratterizzano un periodo che è di maturazione, di riflessione e di critica e mal saprebbero rivelare la propria opportunità quando si tratta di applicazioni elementari della matematica alla conoscenza della realtà fisica, alla razionalizzazione delle esperienze, alla scoperta di rapporti causali, alla scrittura delle leggi della fisica. Pertanto la concreta esperienza degli insegnanti, che hanno la responsabilità diretta delle classi di discenti, ci ha condotto alla conclusione che occorre anzitutto (come si è detto ripetutamente) ricercare il livello di astrazione e di generalità che è commisurato alle conoscenze del discente ed alle sue necessità di razionalizzare la realtà sulla quale egli opera; e d’altra parte ci ha condotto anche a non trascurare la utilizzazione delle conoscenze di fisica, della maturità che consegue alle esperienze di officina che i discenti hanno acquisito, per costringerli invece a ricevere un insegnamento astratto, di cui i discenti stessi non colgono al momento la profonda motivazione. Si potrebbe osservare che questa conclusione non ha il significato di una grande scoperta, e che invece concorda con ciò che viene detto dalle varie scuole di psicologia a proposito dell’insegnamento della matematica; tuttavia anche la riscoperta di una verità conosciuta, riscoperta imposta dalla realtà delle reazioni degli allievi, può essere utile; e ciò anche per rimeditare su certi orientamenti che sono di moda presso altri ordini di scuole a proposito dell'insegnamento della matematica. Da questa prima esperienza, che ha portato ad una reazione di rigetto di fronte all’impostazione primitiva del nostro esperimento, è nata l’idea di prendere in considerazione uno svolgimento cronologico della presentazione dei vari blocchi che fosse diverso (anche magari in modo radicale) dalla gerarchia logica che regge i rapporti di dipendenza dei vari blocchi tra loro.

Le motivazioni di carattere psicologico, secondo le quali appare opportuno destare il più possibile l’interesse dei discenti, insieme con la reazione di rigetto di cui si è parlato, ha confermato l’idea di fare del blocco denominato «Grandezze e misure» il blocco centrale del corso. Ripetiamo ancora una volta che l’idea dominante di questo blocco è quella di presentare la matematica come il linguaggio principale della scienza e della tecnica: per ottenere ciò si sono presentati gradualmente i numeri anzitutto come delle coordinate generiche, mostrando poi che essi possono essere utilizzati in modo via via più efficace, ad un livello progressivamente più profondo, per ottenere delle informazioni sempre più numerose sulla realtà che è oggetto delle operazioni del discente. Va ricordato che nel blocco che abbiamo chiamato «Grandezze e misure» non si dà una trattazione del concetto di grandezza a livello assiomatico astratto, ma si suppone che il concetto sia provvisoriamente noto, insieme con le proprietà fondamentali quali risultano date dalla esperienza quotidiana sugli enti ai quali abitualmente si dà il nome di grandezze; tra le altre proprietà, si accettano in particolare quella della indefinita divisibilità e quella enunciata dalla classica proposizione di Archimede. Coerentemente con questa impostazione, il concetto di numero razionale è stato presentato come quello di un operatore tra grandezze, sottolineando tuttavia di volta in volta le proprietà formali di tali operatori e ponendo cosi le basi per i contenuti dei blocchi intitolati convenzionalmente «Operazioni » e «Strutture».

In particolare nelle avvertenze per gli insegnanti si suggerisce che il blocco «Operazioni » dovrebbe essere svolto in parallelo con quello intitolato «Grandezze e misure»; e ciò allo scopo di evitare le trattazioni al livello eccessivamente astratto e per dare invece al blocco «Operazioni » dei contenuti concreti, per quanto ciò sia possibile. L’operazione di misura delle grandezze offre poi la occasione per la presentazione di algoritmi infiniti e quindi per gettare le basi di una teoria concreta dei numeri reali. Una teoria cosiffatta non è stata svolta; anzi si è anche evitato di introdurre l'espressione «numero reale»; ci si è limitati da una parte ad enunciare la proprietà della indefinita divisibilità delle grandezze e dall’altra ad enunciare l’esistenza di una corrispondenza univoca tra una successione infinita di numeri decimali (misure approssimate per meno di 10', con r intero naturale crescente) e una grandezza.

Come conseguenza di quanto abbiamo detto, si ha che il diagramma logico di dipendenza tra i vari blocchi che costituiscono il corso è stato praticamente capovolto nello svolgimento cronologico, perché il blocco intitolato convenzionalmente «Insiemi e logica», che logicamente sta alla base di tutto l’edificio che si vuole costruire, è stato spostato e collocato alla fine del corso, al termine del secondo anno.

Ripetiamo tuttavia una volta ancora che nelle raccomandazioni agli insegnanti si è insistito sul fatto che il vocabolario tecnico della teoria intuitiva degli insiemi ed i concetti fondamentali di questa debbono essere utilizzati di fatto fino dal primo giorno di insegnamento. Come abbiamo già detto, a questo stadio tale teoria dovrebbe essere appresa come si apprende la lingua materna: ascoltando, cercando di imitare chi parla, accettando le correzioni, accettando le definizioni che vengono dette "ostensive" (quelle che la logica classica chiamava definizioni «per additamentum» e che consistono nel presentare una cosa, nell'additarla, pronunciando contemporaneamente il suo nome); la stessa raccomandazione viene fatta a proposito del vocabolario della teoria dei gruppi e dei campi.

Questo atteggiamento — ripetiamo — non vuole essere una fuga dal rigore, ma vuole essere una ricerca della motivazione del discente, perché questi sia convinto che la matematica costituisce un fattore importante della sua crescita intellettuale. E d'altra parte questa impostazione non costituisce una resa alle pretese di certi utilizzatori della matematica, i quali hanno l'abitudine di parlare di "matematica che serve" e di contrapporla alla "matematica inutile". Siamo infatti convinti che tutta la matematica sia utile, ma che questa utilità non debba essere presentata ai discenti con un atteggiamento apodittico, ma facendo esperimentare concretamente al discente la crescita interiore che è conseguenza del possesso degli strumenti astratti che egli assimila. Infatti non intendiamo far accettare gli sviluppi della matematica con un atteggiamento analogo a quello che la leggenda attribuisce a D'Alembert, riportando la frase a lui attribuita: «Proseguite; la fede verrà». Invece in tutto il corso ci siamo sforzati di motivare il più possibile le regole astratte e le procedure di calcolo. Ripetiamo ancora una volta che il nostro scopo è stato quello di cercare di unificare il più possibile, e di collegare le formule con le illustrazioni geometriche e con i richiami di fisica, in modo che il discente che nel futuro dimenticasse per avventura la «regola per risolvere il problema» sapesse trovare da sé la strada per avere maggiori informazioni mediante le strutture formali della matematica.

In questo ordine di idee abbiamo cercato di presentare certi capitoli di aritmetica e di trigonometria combattendo certi « tabù» classici sui quali molti autori e molti insegnanti sembrano essersi fissati e bloccati: per esempio abbiamo insistito nel presentare la somma di due razionali attraverso la somma di due frazioni che hanno uguali denominatori; ma abbiamo ripetutamente avvisato che la ricerca del minimo denominatore comune non è affatto necessaria e costituisce spesso una ricerca che affatica inutilmente, anche se viene frequentemente messa sullo stesso piano del fatto fondamentale, cioè della regola che impone di sommare due frazioni solo quando hanno denominatori uguali. In modo analogo abbiamo sfrondato, come si è già detto, la presentazione delle funzioni trigonometriche da tanti personaggi che diluiscono la attenzione, anche se essi sono spesso presentati in buona fede allo scopo di facilitare l'apprendimento. Tali personaggi sono per esempio il «cosiddetto cerchio goniometrico» e spesso anche la coppia di assi coordinati cartesiani; qualche autore introduce anche un doppio sistema di coordinate, cartesiane e polari. Con tutti questi espedienti si ottiene spesso lo scopo che, malgrado tutte le buone intenzioni, il discente perde di vista le operazioni elementari e concrete mediante le quali egli può determinare il valore approssimato delle funzioni goniometriche di un angolo dato con una figura, mediante poche misure e pochissime operazioni aritmetiche.

Si potrebbero presentare molti altri esempi, oltre a questi due di cui abbiamo parlato; ci limitiamo a questi perché pensiamo che essi siano sufficienti per mostrare lo spirito secondo il quale tutto il corso è stato concepito; spirito che — ripetiamo — mira a fare acquisire metodi ed idee piuttosto che a far apprendere delle regole di comportamento. Secondo questo spirito si sono anche ricercati numerosi esercizi che potrebbero essere chiamati «non standard» oppure anche **«** fuori routine»; ciò abbiamo fatto per stimolare la fantasia e la inventiva dei discenti che debbono risolvere gli esercizi stessi, avvertendo anche gli insegnanti perché stimolassero anche l'uso di metodi grafici e geometrici per la soluzione degli esercizi accanto alle formule e ad altri procedimenti che spesso sono richiesti non dalla logica del problema, ma semplicemente dalla necessità di raggiungere ordini di approssimazione che i metodi geometrici non consentono.

9. Il problema che merita forse una attenzione particolare è quello che ci è stato posto dall'insegnamento della geometria, nell'ambito del corso di matematica, e dello spirito al quale abbiamo voluto informarlo. Anche a proposito di questo argomento è stata scelta una strada che non porta alla assiomatizzazione astratta dei concetti geometrici, ma è stata scelta una soluzione del problema didattico che portasse alla utilizzazione di tutte le conoscenze e di tutte le esperienze che il discente già possiede oppure che sta accumulando.

Come è ben noto, nel caso della geometria è bene partire da un certo insieme di conoscenze presupposte nei discenti, e rinunciare ad insegnare delle definizioni astratte, oppure a far ripetere delle frasi del tipo: **« ...** il punto è... **»** oppure **« ...** la retta è ... **»;** frasi che appaiono delle definizioni, ma che sono spesso più oscure dei concetti che si vorrebbero cosi definire. Occorre invece limitarsi ad enunciare un insieme di frasi che si accettano come vere e che contengono termini come «punto» oppure «retta» oppure infine «piano» ed altri termini della geometria. Sappiamo che questo modo di procedere porta a quella che viene chiamata la «definizione implicita «dei concetti fondamentali, definizione che viene conseguita assegnando la «grammatica logica» dell'uso dei termini e rinunciando a dare di questi una definizione formale. Ricordiamo di passaggio che questa tecnica è adottata anche in molti altri campi, ed è accettata senza constatazioni: per esempio chiunque accetta che i pezzi del gioco degli scacchi non sono definiti logicamente dai loro nomi (che sono puramente convenzionali, tanto che il pezzo che per esempio in Italia viene chiamato «alfiere» altrove viene chiamato «vescovo») ma dalle regole del gioco; in altre parole soltanto l'insieme di tutte le regole del gioco costituisce la definizione implicita di tutti i pezzi del gioco degli scacchi, Su questa base abbiamo scelto la esperienza del trasporto rigido come la esperienza concreta dalla quale si può partire per costruire la trattazione della geometria a livello astratto e generale; infatti abbiamo già ripetuto varie volte che i discenti manovrano quotidianamente dei corpi rigidi, studiano l'azione delle forze prese in considerazione dalla meccanica, misurano delle lunghezze trasportando dei campioni che non cambiano sensibilmente di forma e dimensione sotto l'azione degli sforzi muscolari. Volendo esporre le stesse cose con altre parole, potremmo dire che abbiamo scelto la presentazione della geometria come «primo capitolo della fisica»; cioè come una trattazione teorica la quale razionalizza (parlando di oggetti idealizzati anche con l'intervento della fantasia) le nostre esperienze sensibili, eseguite sugli oggetti che la fisica studia; precisamente quelle esperienze che riguardano la forma, la grandezza e la posizione reciproca degli oggetti studiati dalla fisica. In questo ordine di idee l'atteggiamento euclideo si è presentato come il più spontaneo. Naturalmente non è stata completamente ripudiata l'analisi critica dei principi, analisi che la matematica ha sviluppato negli ultimi decenni; ma non si è potuto trascurare il fatto che le varie «geometrie-non» sono venute alla ribalta della scienza dopo che per decine di secoli la geometria euclidea era stata considerata come l'unica geometria possibile. Questo fatto — ripetiamo — potrebbe confermare la opinione di chi pensa che certe «geometrie» le quali appaiono concettualmente più semplici della geometria euclidea hanno forse un contatto meno diretto con la realtà che viene idealizzata dalla geometria. Per poter chiarire ulteriormente il nostro pensiero vorremmo riferirei all'esempio che ci è fornito dalla geometria affine; dal punto di vista logico appare chiaro che questa, in assoluto, risulta essere «più semplice» della geometria euclidea classica; il che significa soltanto che essa può essere costruita partendo da un sistema di assiomi che è meno numeroso e complicato di quello che può essere messo alla base della geometria euclidea.

Ma si può anche pensare che una geometria, nella quale non ha senso parlare di «uguaglianza tra segmenti » a meno che questi non siano paralleli tra loro, sia abbastanza staccata dalle esperienze concrete dei discenti, i quali quotidianamente trasportano dei campioni rigidi di segmenti, in piena libertà nello spazio. Paradossalmente quindi ciò che è concettualmente più semplice appare come più staccato dalla realtà e quindi richiede uno sforzo di astrazione maggiore di quello che è richiesto dalla trattazione concettualmente più complicata. Pertanto l'esigenza dell'efficacia didattica e della motivazione psicologica ha ricondotto alla impostazione della geometria secondo una linea classica, impostazione che facesse continuamente appello all'esperienza concreta quotidiana della manovra dei corpi rigidi. Questa impostazione del problema didattico non significa tuttavia che si voglia trascurare il rigore nell'insegnamento della geometria; anzi si potrebbe dire che quando questa dottrina viene considerata come il primo capitolo della fisica essa assume in pieno quel carattere formativo che qualche moderna corrente di pensiero matematico vorrebbe toglierle.

Tuttavia pensiamo che il rigore nella geometria non si manifesti soltanto nella enunciazione di certi sistemi astratti di assiomi e nella critica dei principi; pensiamo invece che lo studio della geometria, anche se non si insiste nella assiomatica e nella critica, possa e debba restare un avvio alla formazione scientifica dei discenti, all'uso corretto del vocabolario tecnico, all'abitudine di dedurre rigorosamente, alla costante pratica di non fidarsi della evidenza della figura per concludere i ragionamenti.

Pertanto, in coerenza con queste idee, abbiamo rinunciato ad una impostazione rigorosamente assiomatica della geometria, e ci siamo limitati a ricordare agli insegnanti (nelle schede didattiche ad essi dedicate) per grandi linee la trattazione che D. Hilbert ha dato del problema dei fondamenti della geometria. Si potrebbe infatti dire che i gruppi di assiomi che sono stati enunciati da Hilbert si discostano abbastanza poco dalla geometria euclidea classica, pur rispettando il rigore della trattazione logica; in particolare si potrebbe osservare che la successione nella quale Hilbert presenta i suoi assiomi rispetta una certa graduatoria della «complicazione» delle esperienze concrete che stanno alla base della elaborazione delle idee basilari della geometria. È noto infatti che il primo gruppo di assiomi enunciati da Hilbert riguarda le relazioni di appartenenza; si potrebbe dire che le esperienze che fondano la elaborazione fantastica che dà luogo appunto a questi assiomi hanno una genesi sostanzialmente nelle sensazioni visive; infatti la relazione di appartenenza di un punto ad una retta, oppure ad un piano, oppure della appartenenza di una retta ad un piano ed altre dello stesso genere, si possono verificare semplicemente «guardando» come stanno le cose. Il secondo gruppo di assiomi riguarda, come è noto, le proprietà della relazione di ordinamento; anche questo gruppo di assiomi potrebbe essere pensato come generato da sensazioni di tipo visivo; va detto tuttavia che gli assiomi del secondo gruppo traggono la loro origine anche dalla percezione del tempo.

Basti pensare alla esperienza tipicamente composita da sensazioni visive e dalla percezione temporale che consiste nell'osservare un punto che si muove descrivendo una traiettoria; tale esperienza può essere considerata come una delle fondamentali per fondare la relazione di ordinamento. Un discorso a parte meriterebbero gli assiomi che Hilbert dedica alla congruenza. Come è noto questa relazione tra segmenti, tra angoli e tra figure elementari viene da Hilbert introdotta attraverso una definizione implicita, stabilendo con opportuni assiomi una «grammatica logica» dei termini che coinvolgono la relazione di congruenza. Ora a proposito della relazione che ci interessa abbiamo scelto di presentare nelle schede didattiche per insegnanti una impostazione diversa da quella che è stata data da Hilbert: precisamente abbiamo scelto una strada che accetta l'idea di «movimento rigido» come idea primitiva: e questa scelta è stata motivata dalle ragioni che abbiamo già esposto e che mirano a sfruttare le esperienze che i discenti traggono dal loro ambiente di lavoro e le esperienze concrete che essi quotidianamente vivono.

Tuttavia abbiamo rinunciato ad enunciare un sistema di assiomi astratti che caratterizzasse il concetto di «movimento rigido», ritenendo sufficiente richiamare le osservazioni (ormai classiche) secondo le quali occorre evitare di definire l'uguaglianza mediante il movimento rigido e il movimento rigido mediante l'uguaglianza; occorre quindi scegliere uno dei due concetti come primitivo e caratterizzarlo mediante un opportuno gruppo di assiomi, oppure accettarlo come un dato dalla evidenza tratta dalla intuizione che elabora la esperienza concreta e quindi ci dà i1 concetto insieme con le sue proprietà fondamentali. Pertanto abbiamo sostanzialmente lasciato libero il docente di presentare il concetto nella maniera e secondo la strada che gli appaiono più convenienti, accettando come fondamento una «evidenza» che non è rinuncia ad un rigore astratto, ma semplicemente costituisce il modo più efficace (a nostro parere) di utilizzare al meglio le esperienze e le conoscenze dei discenti.

Vogliamo osservare che anche in questo caso — come già abbiamo detto — il nostro atteggiamento non è stato guidato dalla tendenza a considerare i discenti dei Centri ANCIFAP come dei «cittadini di serie B» del sistema scolastico. Al contrario, crediamo, che al livello di cultura e di maturità al quale i discenti sono giunti, essi siano in grado di apprezzare il ragionamento rigoroso, la costruzione geometrica concepita come metodo, in una parola i vari procedimenti della geometria, più quando conducono alla scoperta di nuove verità che quando sono messe al servizio della esigenza di un rigore astratto per dimostrare delle cose che ai discenti appaiono come «evidenti ».

Naturalmente con questo atteggiamento non vogliamo svalutare e svuotare di significato le ricerche miranti ad analizzare i sistemi di assiomi ed i fondamenti della geometria. Pensiamo tuttavia che queste ricerche possano essere apprezzate pienamente in tutto il loro valore soltanto in uno stadio di crescita intellettuale dei discenti che li porti ad apprezzare la critica dopo la conquista e la scoperta.

Nel caso della assiomatica geometrica e del corso di cui stiamo parlando pensiamo che la maturazione dei discenti non sia ancora avanzata sufficientemente per poter apprezzare in modo positivo la critica dei principi. Per fare un esempio, pensiamo al teorema nel quale D. Hilbert dimostra che, dati due punti su una retta (ovviamente distinti) esiste almeno un punto che sta fra essi. Ovviamente, quando il discente avrà raggiunto una certa maturità mentale, egli potrà apprezzare questa dimostrazione e la economia di assiomi e l'eleganza della deduzione; ma, quando la geometria viene insegnata ancora al livello al quale la stiamo considerando, il discente dovrebbe — per così dire — sforzarsi di dimenticare la immagine geometrica, di supporre falso o incerto ciò che gli appare evidente dall'esperienza fisica, per raggiungere poi la soddisfazione (puramente intellettuale) di accertare con la dimostrazione ciò che gli appariva già evidente in partenza. È ragionevole pensare che, come minimo, il discente rischia di farsi delle idee un po' confuse a proposito del procedimento di dimostrazione, del quale egli pensa (ed a ragione, dal suo punto di vista) che abbia come compito quello di accertare le cose dubbie, o nascoste o sconosciute, non quello di accertare quelle che appaiono come delle evidenze immediate. In altre parole, pensiamo che la ricerca della eleganza logica e della economia degli assiomi abbia un senso quando tutta la materia sia dominata e sia rimeditata in fase critica; ma che abbia forse meno senso quando si tratta di costruire una materia e di conferire una prima conoscenza di essa, a dei discenti che la ignorano o che ne avevano una conoscenza approssimativa.

Per dire qualche cosa di analogo relativamente al campo dell'algebra, si potrebbe pensare che non sia opportuno far studiare questa materia a partire dagli assiomi fondamentali quando ancora i discenti hanno delle incertezze sull'impiego delle convenzioni fondamentali del calcolo algebrico: sarebbe un po' come far studiare la sintassi di una lingua a chi non ha ancora una sicurezza sufficiente per esprimersi a livello assolutamente elementare.

Abbiamo infine trattato nelle schede didattiche per gli insegnanti gli assiomi degli ultimi due gruppi del sistema presentato da D. Hilbert.

Come è noto, questi due gruppi riguardano da una parte l'assioma della parallela e dall'altra la proposizione di Archimede e la proposizione riguardante la continuità.

Abbiamo presentato il carattere abbastanza diverso delle radici psicologiche di questi assiomi da quelle che hanno fondato gli assiomi degli altri gruppi. Si potrebbe infatti dire che gli assiomi degli ultimi gruppi hanno un fondamento psicologico che si riattacca ad una particolare estrapolazione fantastica della realtà della esperienza concreta. Si pensi per esempio all'assioma della parallela, nella formulazione classica che si trova negli "Elementi" di Euclide; secondo questa formulazione si ha che se due rette formano con una trasversale comune due angoli coniugati interni che hanno una somma diversa da due retti, le rette si incontrano.

Volendo esprimere questi fatti in forma suggestiva anche se non troppo rigorosa si potrebbe dire che l'incontro delle due rette deve avvenire (secondo il postulato), ma potrebbe avvenire anche in regioni lontanissime da quella — sempre finita — nella quale l'osservatore esperimenta, in particolare anche in regioni lontanissime da quella nella quale l'osservatore constata che la somma dei due angoli coniugati interni di cui si diceva è diversa da due retti. In questo senso si potrebbe dire che questo assioma trae la sua genesi psicologica da una esperienza concreta che è diversa da quelle che fondano gli assiomi dei gruppi precedenti. Con questo non si vuole tuttavia fare un apprezzamento a proposito della evidenza dell'assioma stesso.

Considerazioni analoghe potrebbero essere svolte a proposito dell'assioma di Archimede; come è noto, questo afferma che dati due segmenti, di cui per esempio il primo sia più piccolo del secondo, esiste sempre un multiplo del primo che risulta essere maggiore del secondo. Anche in questo caso si potrebbe dire che il numero intero per cui deve essere moltiplicato il primo segmento per ottenere un multiplo superiore al secondo potrebbe in linea di principio essere grandissimo, maggiore di ogni numero intero di cui l'osservatore possa avere esperienza.

Infine l'assioma di continuità della retta, quale che sia l'enunciazione che se ne dà, enuncia delle proprietà che certamente superano ogni possibilità della nostra esperienza, anche se esse appaiono da un certo punto di vista abbastanza evidenti. Si potrebbe addirittura dire che in questo caso l'assioma enuncia una proprietà che certamente non può essere esperimentata sulla materia, quale che sia la potenza degli strumenti di cui si dispone; anzi le moderne teorie sulla costituzione della materia depongono piuttosto a favore di una quantificazione della materia che a favore di una continuità che comporterebbe la indefinita divisibilità. Pertanto, se si considera la geometria come il primo capitolo della fisica, l'assioma di continuità presenta in pieno il suo carattere di astrattezza, cioè la sua caratteristica di essere uno schema mentale che è comodo per certi scopi, ma che risulta certo inadeguato per rendere tutte le proprietà della materia sulla quale operiamo e del mondo che ci circonda.

A proposito dell'assioma di continuità si potrebbe addirittura rilevare una situazione che può apparire paradossale: infatti nella concezione classica della matematica si poteva pensare che questo assioma traesse probabilmente il suo fondamento dalla concezione che la fisica di allora si faceva della materia, che veniva concepita precisamente come dotata di indefinita divisibilità. Basti ricordare la trattazione classica che riguarda il calore, considerato come un "fluido" sottilissimo ed indefinitamente divisibile. Usando ancora una volta di espressioni suggestive, anche se non troppo precise, si potrebbe dire che nella concezione classica la realtà fisica "vera" era considerata come continua, e di conseguenza la misura di una grandezza fisica data mediante un numero razionale veniva considerata come una approssimazione, utile se non addirittura necessaria, ma certamente inadeguata per rendere tutta la realtà. Invece nella visione che la fisica di oggi ci dà della realtà materiale la quantificazione della materia e della energia ha una parte fondamentale; pertanto lo schema ideale che la matematica ci fornisce con la idea di continuità ci appare spesso come comodo ma inadeguato per descrivere a fondo la realtà. Per esempio, è chiaro che il campione di lunghezza potrebbe essere dato in numero di lunghezze d'onda di luce di un certo colore, e di conseguenza ogni lunghezza potrebbe essere rappresentata mediante un numero intero. Il fatto che invece si utilizzino nella pratica della misura in metri, millimetri e micron, e di più che si considerino tacitamente queste misure come "indefinitamente migliorabili" ci appare come la conseguenza della adozione di uno schema comodo (quello della continuità) che tuttavia non ha rispondenza completa nella "vera" struttura della materia, cosi come ci è presentata dalla microfisica.

10. Ciò che abbiamo detto fin qui a proposito della continuità ci conduce in modo naturale a parlare della questione riguardante i numeri reali, il posto che essi hanno nel nostro corso, e la trattazione che ne diamo.

Prima di accennare a questa vogliamo ripetere ancora una volta che la nostra scelta non è stata in favore di quella che potrebbe essere chiamata una "matematica nebulosa", o "matematica di prima approssimazione", ma è stata dettata dalla intenzione di dare ai discenti tutto ciò che è utile ad essi per la conoscenza di quella realtà che essi imparano a conoscere ed a trattare nei corsi paralleli. Pensiamo infatti che il problema didattico non debba essere posto come quello della scelta tra il rigore e il non rigore, ma nella ricerca di quel livello di astrazione che possa motivare l''interesse dei discenti agli strumenti astratti e generali, tenendo conto delle loro esperienze concrete e del linguaggio che già essi posseggono. Tenendo conto di questa impostazione abbiamo rinunciato ad enunciare in modo esplicito un postulato di continuità tra gli assiomi della geometria. Ci siamo limitati ad enunciare da una parte la indefinita divisibilità delle grandezze, e dall'altra la esistenza di una grandezza che corrisponde ad una misura, la quale è supposta indefinitivamente "migliorabile" perché fornita sostanzialmente da un algoritmo infinito convergente.

Anche la esistenza di un sottomultiplo di una grandezza data secondo un intero qualsivoglia è stata accettata e utilizzata senza dame una dimostrazione rigorosa, come è possibile fare fondandosi sugli assiomi che vengono abitualmente enunciati a proposito delle classi di grandezze.

Si è cercato cosi un punto di equilibrio, una posizione mediana soddisfacente, tra le due soluzioni che potrebbero essere considerate come estreme: da una parte la soluzione di presentare una teoria formale rigorosa dei numeri reali, impresa che difficilmente potrebbe essere realizzata, se non altro per mancanza di tempo; all’altro estremo una soluzione che rappresenti la rinuncia totale ad usare la matematica come un mezzo razionale di espressione e di indagine e di deduzione, per ridurla ad una raccolta di formule (vorremmo dire "ricette") per risolvere dei problemi concreti. Tale punto di equilibrio è stato cercato appoggiandosi sulle proprietà supposte note dell’intuizione e dalla schematizzazione della esperienza che abbiamo dalla manovra delle grandezze che — in prima approssimazione — consideriamo come continue, cosi come faceva la fisica classica. Osserviamo (se ce ne fosse bisogno) che questo atteggiamento non può essere considerato come antiscientifico; esso vuole soltanto proporzionare i mezzi astratti e le strutture formali ai fini che si vogliono ottenere.

Per fare un esempio, vorremmo dire che qualche decennio fa ben raramente era richiesto un trattamento dell’acciaio che tenesse conto della struttura molecolare; di conseguenza era perfettamente legittimo (e lo è ancora, quando si opera allo stesso livello di approssimazione) trattare una superficie levigata di acciaio come se fosse rappresentata dallo schema teorico del piano geometrico (cioè come se la superficie fosse continua e "senza buchi") anche se si era ben consci del fatto che la superficie non ha questa qualità. In modo analogo, come abbiamo già detto, le ricerche sul calore iniziate dal Fourier e sboccate nella termodinamica macroscopica classica conservano tutta la loro validità, anche se oggi abbiamo rinunciato a schematizzare il calore come un "fluido sottilissimo ".

Pertanto abbiamo cercato di dare un fondamento alla struttura algebrica dei numeri reali ed alle relazioni di ordine nella esperienza concreta delle operazioni sulle grandezze continue; e d'altra parte non abbiamo dimenticato di insistere nelle schede didattiche per gli insegnanti sulla esistenza di algoritmi infiniti i quali portano alla possibilità di migliorare continuamente la approssimazione della misura di una data grandezza; concretamente, quando si adotti la convenzione decimale per la rappresentazione dei numeri, questi algoritmi infiniti portano alla possibilità di trovare sempre una cifra decimale in più di quelle che già si hanno della misura di una grandezza.

Del resto abbiamo osservato che anche solo la utilizzazione di numeri razionali dà luogo ad algoritmi infiniti, come avviene per esempio quando si voglia rappresentare in una certa base, per esempio nella base 10, un razionale che sia rappresentato da una frazione la quale, ridotta ai minimi termini, abbia al denominatore dei fattori diversi da quelli che danno la base. In questo caso anche la rappresentazione di un numero razionale, che sia rappresentato da una successione periodica di cifre dopo la virgola, può comportare un periodo che ha un tale numero di cifre che la regolarità si presenta come non afferrabile nella pratica della misura e dei calcoli; per esempio è noto che 10/47 viene rappresentato sotto .forma decimale con un periodo che ha 46 cifre; e non pare che la tecnica attuale utilizzi abitualmente delle approssimazioni dell'ordine di 10^{46}.

Coerentemente con queste idee, la teoria dei numeri razionali è stata presentata come una teoria degli operatori sulle grandezze continue, ed in tale modo è stata anche data la giustificazione e la illustrazione delle proprietà formali del campo dei numeri razionali.

Con impostazione analoga, cioè con la interpretazione dei numeri come operatori, è stata presentata anche la teoria degli interi; la stessa strada è stata seguita nel blocco C-5 (Complementi di algebra e di geometria) per la presentazione dei numeri complessi, per quelle classi di allievi che avessero bisogno di questi strumenti per le applicazioni alla elettrotecnica. In una parola è stato adottato in modo metodico il procedimento che consiste nel presentare certi numeri (che costituiscono la estensione dell’insieme dei numeri naturali) come degli operatori su una certa realtà che si assume di volta in volta come conosciuta; il passo fondamentale consiste quindi nel passaggio da una realtà concreta, conosciuta ma non formalmente analizzata, ad una struttura teorica che la rappresenta a livello di linguaggio artificiale. Pertanto la strada seguita è coerente con tutto lo spirito che ha diretto ed ispirato il nostro lavoro.

11. Nell’impostazione che abbiamo dato al corso si è voluto conferire un posto particolarmente importante agli esercizi. Abbiamo già detto che abbiamo voluto presentare la matematica sotto l’aspetto di linguaggio; pertanto si può dire che l’utilizzazione concreta di questi strumenti fa progredire nella conoscenza delle realtà che si studiano e anche nella conoscenza degli strumenti utilizzati.

Per quanto concerne l’aspetto formativo dell’apprendimento della matematica abbiamo ripetutamente ricordato che il linguaggio matematico ha delle regole sintattiche molto precise, anche perché risultano essere sostanzialmente convenzionali. Ne consegue che il linguaggio matematico, a differenza dei linguaggi naturali, risulta privo di quel carattere che la teoria dell'informazione chiama "ridondanza". In altre parole si potrebbe dire che il linguaggio comune riesce a trasmettere delle informazioni sostanzialmente giuste anche se non si rispettano tutte le regole formali (si pensi per esempio al linguaggio utilizzato nei telegrammi, linguaggio che risulta sgrammaticato ma che tuttavia viene compreso dal ricevente), mentre il linguaggio matematico comunica delle informazioni del tutto diverse tra loro (e quindi anche distorte) se non sono rispettate tutte le regole formali. Si pensi per esempio alla gerarchia di precedenza tra le due operazioni di somma e moltiplicazione nella cosiddetta "espressione aritmetica": per esempio alla differenza tra le due espressioni

$$3\cdot 2+1 \quad \text{e} \quad 3\cdot(2+1)$$

e si pensi, al limite, alla esistenza di formule che non sono "ben formate", secondo la espressione della logica formale, come, per esempio 3(2+ che non hanno alcun significato e che non permettono neppure di tentare di ricostruire il messaggio (se ve n'era uno) che lo scrivente ha tentato di comunicare.

Ciò che abbiamo superficialmente osservato vorrebbe introdurre alla considerazione dei vari problemi che si pongono a proposito della scelta degli esercizi; infatti gli scopi che si vorrebbero ottenere sono diversi. Un primo scopo potrebbe essere descritto dicendo che con l'esercizio si vorrebbe addestrare il discente all'impiego corretto e spedito del linguaggio matematico. Abbiamo volutamente impiegato il termine "addestrare" perché l'uso dei vari segni del linguaggio (parentesi, segni di frazione ecc.) dovrebbe diventare quasi automatico, cosi come lo è la applicazione delle varie regole grammaticali che, in una lingua vivente, regolano per esempio le concordanze di numeri e generi tra sostantivi ed aggettivi. Se tali regole sono state oggetto di opportuno addestramento esse diventano quasi delle esigenze dell'orecchio e quindi applicate in modo che è più un riflesso automatico che una applicazione voluta e meditata di una regola .astratta grammaticale. Del resto va ricordato che quest'ultima, nel caso dei linguaggi naturali, non è che una codificazione di certi fatti e di certe abitudini che hanno radici profonde nella psicologia dei vari popoli e quindi anche di certe situazioni nelle quali anche il cosiddetto "orecchio" ha la sua parte.

Oltre allo scopo di dare un addestramento all'impiego del linguaggio, l'esercizio dovrebbe tuttavia raggiungere anche lo scopo di dare al discente la convinzione sempre più radicata che il linguaggio matematico giunge a dare informazioni sulla realtà e quindi è un mezzo di conoscenza, uno strumento per inserire le nostre esperienze concrete in un quadro razionale, per *dirigere* le nostre azioni sulla materia, in una parola per acquisire una libertà sempre maggiore nei riguardi del mondo che ci circonda.

In questo ordine di idee abbiamo quindi diretto la scelta degli esercizi in due direzioni, secondo due criteri: il primo criterio è stato quello di scegliere gli esercizi dalla realtà con la quale il discente è quotidianamente a contatto; in particolare dal corso di fisica (svolto con i criteri di cui si è già detto) e dalle esercitazioni di officina. Ripetiamo ancora che la nostra intenzione non è quella di rinchiudere gli allievi in questa realtà, ma soprattutto di dare ai discenti i mezzi teorici per poterla conoscere il più a fondo possibile e quindi per potere emergerne intellettualmente.

In secondo luogo è stato dato un posto abbastanza importante a quelli che si potrebbero chiamare esercizi *fuori routine*; con questa scelta si è voluto instillare nei discenti l'idea che la risoluzione di un problema matematico non sta nella supina applicazione di certe formule; sostanzialmente la risoluzione consiste nell'escogitare un procedimento razionale, rigoroso e programmato, mediante il quale si possono ottenere delle informazioni in più di quelle che si avevano prima, o meglio, si possono rendere esplicite quelle informazioni che erano implicite all'inizio del procedimento.

Si è cercato di ribadire questo concetto, cercando di presentare certi esercizi con commento, nei quali la risoluzione non è data dalla applicazione di formule codificate, ma che richiedono invece che il solutore debba in qualche modo costruirsi da sé un procedimento, un simbolismo (magari rudimentale) debba enunciare le leggi di questo simbolismo ed applicarle.

La cosiddetta "matematica ricreativa" (che è invece molto seria da questo punto di vista) fornisce moltissimi problemi che richiedono dei procedimenti di soluzione eleganti e inconsueti, procedimenti nei quali la inventiva e la fantasia del solutore, insieme con la logica e la adozione di procedimenti abituali, hanno una parte importantissima. A nostro parere potrebbe essere un errore escludere questi problemi dall'insegnamento della matematica, per limitare gli esercizi a quelli (sempre noiosissimi e sempre uguali) che si trovano nei vari libri. Naturalmente questi esercizi fuori routine vanno opportunamente presentati, affinché la loro soluzione non sia il risultato di una semplice "trovata" ma perché invece il procedimento, insieme ideativo e logico, che conduce alla soluzione sia reso esplicito e costituisca un arricchimento interiore del discente che ne prende coscienza.

Particolare importanza è stata data alla menzione dei procedimenti di verifica a posteriori, procedimenti con i quali il solutore degli esercizi deve cercare di accrescere la propria convinzione di aver dato una risposta soddisfacente, pervenendo cosi non soltanto a dare una soluzione del problema, ma anche alla critica della soluzione stessa. Molto spesso infatti, in molte raccolte di esercizi, la soluzione di esercizi è ricondotta semplicemente alla applicazione di formule standard ed il controllo della validità della soluzione è ricondotto al confronto tra la risposta data dal discente e quella stampata sul libro senza giustificazione. Per parte nostra pensiamo che la utilità di raccolte cosiffatte sia alquanto dubbia, e che occorra invece educare il discente alla continua critica dei propri procedimenti, al continuo controllo delle proprie risposte. Infatti se si vuole che l'insegnamento della matematica non si riduca ad essere la enunciazione di un insieme di regole formali ed astratte, ma diventi anche una educazione del discente, occorre che il momento della riflessione, del controllo, della critica abbia almeno la stessa importanza del momento della invenzione, e quindi occorre che il discente sia educato alla ricerca di diverse strade per la soluzione, al continuo controllo di ogni passo del procedimento deduttivo, alla ricerca costante di condizioni necessarie (le cosiddette "prove") che gli permettano di scoprire se ha fatto degli errori e gli consentano quindi di accrescere la propria convinzione di essere sulla giusta strada.

La ricerca degli esercizi più efficaci e più interessanti per le applicazioni è stata fatta anche con la collaborazione di un gruppo (per la verità abbastanza ristretto) di docenti, e ciò con l’intento di uscire il più possibile da quell’insieme di esercizi che si trovano troppo frequentemente sui libri. Abbiamo infatti pensato che soltanto la esperienza concreta dell’insegnamento, della presenza fisica quotidiana a contatto con i discenti permetta di analizzare a fondo la difficoltà degli esercizi, di graduarli, di valutare il loro valore discriminatorio. I commenti che sono stati aggiunti ad alcuni esercizi (specialmente quelli "fuori routine") sono stati fatti per aiutare i docenti a spremere da questi esercizi tutta la possibilità in essi potenzialmente contenuta di educare i discenti ad impadronirsi di certi strumenti logici e formali.

12. La questione riguardante gli esercizi ed il loro valore formativo conduce in modo naturale alla questione che riguarda la valutazione degli allievi. Pensiamo infatti che mal si possa separare la fase dell’insegnamento da quella dell’esercizio e da quella della valutazione.

A questo proposito appare di grande utilità il poter applicare dei metodi di controllo che permettano non soltanto di rendersi conto di quella che si potrebbe chiamare la "resa" grezza dell’insegnamento, ma che possano anche servire per progettare il lavoro futuro dell’insegnante. In altre parole, pensiamo che sia utile poter mettere in opera un meccanismo di controllo che produca una azione di «feed-back» sulla condotta dell’insegnante, pur lasciando a questi la completa responsabilità della direzione del corso. E’ stata scelta la strada che porta all’utilizzazione di un programma già esistente e già sperimentato presso la Università di Milano (Istituto matematico); mediante tale programma le risposte ai questionari vengono elaborate statisticamente in modo che vengano messe in evidenza alcune informazioni che interessano. Non intendiamo entrare qui nei particolari, ma ci limitiamo ad osservare due casi limite che potrebbero presentarsi: il primo caso potrebbe essere quello in cui le risposte ad una domanda sono giuste ma i discenti manifestano nei riguardi delle risposte una mancanza di sicurezza che li rende incerti; un altro potrebbe essere quello in cui le risposte sono date con la massima sicurezza ma sono errate.

Ovviamente si possono concepire numerosissimi casi intermedi tra questi due, ma pensiamo che basti la loro considerazione per convincere che i fenomeni richiedono una condotta diversa da parte del docente che vuole dare una certa efficacia al proprio lavoro; e ciò a prescindere dall’interesse che il docente ha nel conoscere il risultato del proprio lavoro. Invero l’adozione di procedimenti per analizzare le reazioni dei discenti permette ai docenti di esplicitare quel lavoro "su misura" che si accosta il più possibile all'ideale dell'insegnamento personalizzato a cui mira la pedagogia moderna.

Un’ultima parola pensiamo sia da dire a proposito del testo che viene consegnato ai discenti. La soluzione che è stata scelta è coerente con lo spirito che ha retto il nostro lavoro: come abbiamo già detto, abbiamo scelto di scrivere delle schede didattiche rivolte agli insegnanti, per intenderei anzi tutto con loro sulle cose da insegnare e sul modo di insegnarle. Per quanto riguarda il "libro" da consegnare agli studenti abbiamo rinunciato ad un testo scolastico concepito in modo tradizionale. Abbiamo piuttosto preferito scrivere delle "schede di sintesi", in collaborazione con un ristretto gruppo di docenti, che hanno lavorato con noi durante tutto l'esperimento. L’idea è quella di dare delle informazioni sintetiche, dirette sostanzialmente a richiamare i punti salienti delle cose insegnate e le poche formule che vi si riferiscono. Secondo la nostra idea infatti l’insegnamento verbale e la risoluzione guidata degli esercizi dovrebbero già aver dato una formazione sufficiente agli allievi, che li possa dispensare dalla operazione di "studiare sul libro" a casa, secondo la concezione tradizionale della scuola. Pertanto in questo ordine di idee, il discente abbisogna soltanto di una breve sintesi delle formule e della materia, che lo dispensi dal gravare la propria memoria di cose che non la aiutano nella comprensione e nella sintesi.

A questa decisione siamo stati anche confortati dall’esame della attuale letteratura scolastica: questa contiene da una parte una trattazione astratta ed assiomatizzante (tendenzialmente tale) che è condotta ad un livello superiore a quello della possibilità di comprensione degli allievi; dall’altra contiene esercizi ed esempi che sono molto lontani dagli interessi concreti degli allievi dei Centri ANCIFAP e quindi non sono fatti per motivare la loro attenzione e giustificare ai propri occhi la fatica di apprendere.

Si è anche voluto evitare che i discenti pensassero che lo studio della matematica possa ritenersi esaurito quando si imparino a memoria alcune regole o alcune definizioni verbali e dimenticassero il punto essenziale, secondo il quale una parte importantissima dello sforzo da compiersi deve essere fatto nell'apprendere ad impiegare correttamente il linguaggio matematico attraverso gli esercizi.

Riassumendo, il materiale didattico che è stato elaborato durante il lavoro collettivo eseguito insieme con il gruppo ristretto di docenti di cui si è parlato è il seguente:

a) le schede didattiche dirette agli insegnanti; queste schede sono divise in sei blocchi, senza tuttavia che la successione cronologica dell'insegnamento debba seguire quella della esposizione dei blocchi stessi nelle schede; anzi è detto spesso esplicitamente che la trattazione concreta di certi blocchi deve essere preferibilmente fatta "in parallelo ";

b) le schede di sintesi per gli allievi;

c) i blocchi di esercizi.

Alcuni di questi sono graduati e collegati con i blocchi didattici dedicati agli insegnanti; altri sono invece "non standard ", e mirano a stimolare la fantasia, ad accrescere la inventiva, ed anche a stimolare la applicazione della matematica che sono per cosi dire "a cavallo" tra vari blocchi.

Per concludere potremo dire che il nostro scopo, considerati i discenti ai quali ci rivolgiamo, è stato quello di dare un insegnamento non formalistico e puramente verbale della matematica, ma invece quello di cercare di insegnare questa materia in quanto linguaggio della scienza e della tecnica, come mezzo per razionalizzare le nostre esperienze sulla realtà e quindi per conoscerla meglio. In questo ordine di idee ci siamo sforzati il più possibile di presentare la matematica non come una materia astrusa ed oppressiva, ma come uno strumento di chiarezza, di dominio della materia e quindi un mezzo di sostanziale libertà dell'uomo e del cittadino.

NOTA **« ...** La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto inanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intendere la lingua e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto».